MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MINISTRO DE EDUCACIÓN
José Antonio Chang Escobedo

VICEMINISTRO DE GESTIÓN PEDAGÓGICA
Idel Vexler Talledo

VICEMINISTRO DE GESTIÓN INSTITUCIONAL
Victor Raúl Díaz Chávez

SECRETARIO GENERAL
Asabedo Fernández Carretero

DIRECTORA NACIONAL DE EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR
Miriam Janette Ponce Vértiz

DIRECTOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
César Puerta Villagaray

Matemática
Serie 2 para docentes de Secundaria
Didáctica de la Matemática
Fascículo 2: ASPECTOS METODOLÓGICOS EN
EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN SECUNDARIA

Van de Velde 160, San Borja

Primera edición, 2007
Tiraje: 14 000 ejemplares
Impreso en Empresa Editora El Comercio S.A.
Jr. Juan del Mar y Bernedo 1318,
Chacra Ríos Sur, Lima 01

Hecho el Depósito Legal en la
Biblioteca Nacional del Perú
Nro. 2007-00261

Coordinación y supervisión general MED
Antonieta Cubas Mejía
Supervisión pedagógica MED
Luis Enrique Eyzaguirre Espino
Verificación de estilo MED
Miguel Luis Bances Gandarillas

Autoría
Ediciones El Nocedal S.A.C.
Coordinador
Rubén Hildebrando Gálvez Paredes
Elaboración pedagógica
Felipe Eduardo Doroteo Petit
Itala Esperanza Navarro Montenegro
Edgar Justo Chacón Nieto
Daniel José Arroyo Guzmán
Colaboración especial
María Amparo Vega Aguilar
Revisión pedagógica
Hno. Marino La Torre Mariño
Revisión académica
Armando Zenteno Ruiz
Diseño y diagramación
Virginia Rosalía Artadi León

Ilustraciones
Patricia Nishimata Oishi
Brenda Román González
Fotografía
Enrique Bachmann
Corrector de estilo
Marlon Aquino Ramírez

Presentación

Ser docente en Matemática ahora, constituye un verdadero reto, tanto para el dominio de los diversos contenidos de la misma ciencia, así como para poder llegar adecuadamente a los estudiantes. Es necesario, entonces, el dominio de la Didáctica en general; y el de las metodologías, estrategias y formas, en particular, para compartir las diversas experiencias de aprendizaje significativo con los estudiantes de los diversos niveles educativos.

En este fascículo, abordaremos los principios, estrategias y algoritmos que rigen los procesos de desarrollo de capacidades, y que permiten comprender y operar con contenidos del Álgebra y estructuras algebraicas. Asimismo, desarrollaremos ejercicios, problemas, juegos matemáticos, sugerencias de construcción y utilización de materiales.

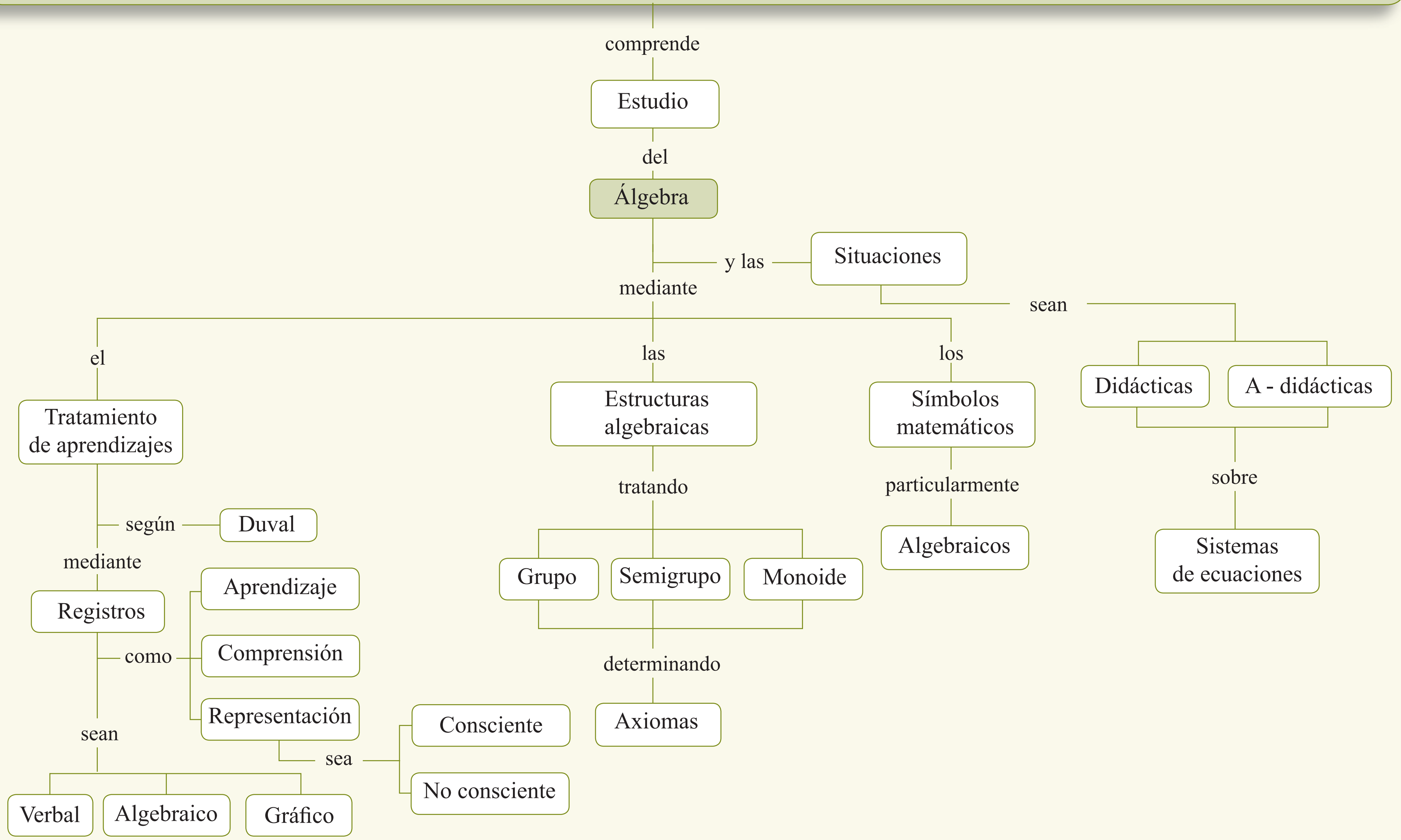
Para comprender los contenidos algebraicos y las estructuras algebraicas debemos desarrollar los procesos de simbolización, abstracción y generalización. De esta manera, puede facilitarse el aprendizaje de objetos matemáticos haciendo conjugar en una secuencia, situaciones que, además, implican trabajo en diferentes registros.

El sustento para construir tal secuencia de enseñanza se basa sobre fenómenos observados relativos al uso de representaciones semióticas en el aprendizaje, sobre la necesidad de plantear al estudiante actividades que los induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación, y sobre aquellas que explican problemas asociados con la asimilación correcta de estos objetos matemáticos. El eje sobre el cual giran las actividades planteadas es buscar comportamientos matemáticos y cognitivos en el quehacer de los estudiantes que propiciarán el aprendizaje del objeto, haciendo que el tratamiento y pasaje entre registros de representación sean menos traumáticos para el estudio del Álgebra.

Complementamos el fascículo con la propuesta de aprendizajes esperados, recuperación de saberes previos, el desarrollo de estrategias de aprendizaje, metacognición, evaluación, chistes matemáticos, curiosidades matemáticas, bibliografía comentada y enlaces *web*.

Índice

ASPECTOS METODOLÓGICOS EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN SECUNDARIA



para docentes

ASPECTOS METODOLÓGICOS *en el* APRENDIZAJE *del* ÁLGEBRA *en* SECUNDARIA

Motivación

Estimado lector, usted se puede convertir en adivinador de números, para ello proponga realizar operaciones del siguiente carácter: pensar un número cualquiera, adicionar 2, multiplicar el resultado por 3, restar 5, restar el número pensado etc., en total cinco o una decena de operaciones. Luego pida que le comuniquen el resultado y, al obtener la respuesta, en seguida puede comunicar el número pensado. El secreto es muy fácil y se basa en las mismas ecuaciones.

Supongamos que haya propuesto realizar el siguiente programa de operaciones:

Piense un número, adiciónele 2, al resultado multiplíquelo por 3, reste 7, reste el número pensado, adicione 2, multiplique por 2, reste 1. Luego pida que le comuniquen el resultado final y, al obtenerlo, dice al instante el número pensado. ¿Cómo lo hace? Traduciendo las indicaciones al idioma del álgebra se obtiene $4x + 1$. Suponiendo que el resultado final comunicado es 25, luego $25 – 1 = 24$; $24/4 = 6$, el número pensado es 6.

Como se ve todo es muy fácil, pues sabe de antemano qué hacer con el resultado para obtener el número pensado. Después de comprender esto, usted puede asombrar y desconcertar aún más a sus amigos, estudiantes, etc. proponiéndoles a ellos mismos escoger según su propio parecer, el carácter de operaciones sobre un número pensado.

Sin embargo, hay un caso en el que usted no puede tener éxito. Si, después de realizar (contando mentalmente) una serie de operaciones ha obtenido, por ejemplo, $x + 14$, y su estudiante dice luego: "...ahora he restado el número pensado y el resultado final es 14". Usted le sigue $(x +14) – x = 14$, de verdad resulta 14, pero no hay ninguna ecuación y por eso usted no puede adivinar el número pensado. ¿Qué es necesario hacer en este caso? Obre así: tan pronto usted tenga el resultado que no contiene la incógnita x, interrumpa a su estudiante, diciéndole: "¡Pare! Ahora puedo sin preguntar nada comunicarte el resultado que tienes. Es 14". Esto de veras va a desconcertar a su estudiante, pues él no le ha dicho completamente nada. A pesar de que usted no supo adivinar el número pensado, su habilidad ha resultado espléndida.

Logros de Aprendizaje

- Analiza la teoría de los registros semióticos y los aprendizajes intelectuales según Raymond Duval, valorando su utilidad.
- Analiza las estructuras algebraicas a través de la interpretación de situaciones, y reconoce al álgebra como un instrumento de modelización matemática, manifestando sentido crítico.
- Organiza situaciones didácticas para el estudio de aspectos del Álgebra y lo aplica en el aula en situaciones concretas.
- Interpreta enunciados matemáticos presentados en un lenguaje formal o de un lenguaje común a través de la lectura, la decodificación y la codificación, la clasificación, la discusión y la representación.
- Procesa la información mediante la relación, la transformación y la aplicación.

Recuperación de saberes previos

Antes de empezar con el desarrollo del presente fascículo es indispensable que recuerdes algunas precisiones. Lee atentamente las preguntas y responde en una hoja aparte.

- ¿Qué se entiende por modelización matemática?
- ¿Cómo podemos relacionar la modelización matemática con el Álgebra?
- ¿Qué es una situación didáctica?
- ¿Cómo podemos desarrollar la comprensión del Álgebra?
- Describe algunas actividades para desarrollar capacidades específicas en el Álgebra.
- ¿Qué papel cumple el juego didáctico en el estudio del Álgebra?
- ¿Qué se entiende por conceptos primitivos?
- ¿Qué se entiende por axioma?
- ¿Qué se entiende por teorema?
- ¿Qué se entiende por operación binaria?
- ¿Qué se entiende por conjunto?

1. *Los* REGISTROS SEMIÓTICOS *y los* APRENDIZAJES INTELECTUALES *según* RAYMOND DUVAL

1.1 Terminología usada en la teoría de Duval

a. Objeto matemático: signo, concepto que aparece en la actividad matemática y del que se conocen sus propiedades, operaciones, teoremas, etc; como los números enteros, las funciones, los límites, los polinomios, las matrices, etc.

b. Representaciones mentales: aquellas que cubren el conjunto de imágenes y las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto.

c. Semiótica: ciencia de los modos de producción, funcionamiento y recepción de los diferentes sistemas de signos de comunicación en los individuos o colectividades. Teoría de los signos. Producción de una representación semiótica.

d. Representaciones semióticas: aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.) que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias reglas y significancia. Es decir, el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Existen tres tipos de registros de representaciones semióticas: registro de la lengua natural, registro gráfico y registro algebraico.

e. Semiosis: es la aprehensión o la producción de una representación semiótica.

f. Noesis: actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la comprensión de una inferencia, etc.

g. Tratamiento: transformación de la representación al interior de un registro de representación o de un sistema. La paráfrasis es una transformación interna del registro del discurso en la lengua natural: "reformula" un enunciado en otro, ya sea para reemplazarlo o para explicarlo.

h. Conversión: transformación externa del registro de representación de partida. La ilustración es la puesta en correspondencia de una palabra, una frase o un enunciado, con una figura o con uno de sus elementos.

i. Congruencia: la congruencia entre registros existe cuando se cumplen las siguientes condiciones:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Significa suma de x_i, desde i = 1, hasta *n*.

Ejemplo de representaciones semióticas.

(X, *)

X es conjunto de elementos y X ≠ ø

* Ley u operación binaria

Representación de una estructura.

Correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas dos unidades en las dos representaciones, y transformación de una unidad significante en la representación de partida en una sola unidad significante en la representación de llegada.

1.2 Registros de representación, comprensión y aprendizaje

Los conceptos matemáticos se representan en los libros, pizarras, etc. por sistemas matemáticos de signos. Estos signos con soporte material forman parte del mundo real; por tanto, la representación mental de estos signos matemáticos se puede considerar como un caso particular de la representación mental de los objetos del mundo real.

Hay dos mundos diferentes: el mundo real de los objetos exteriores al sujeto y el mundo mental del sujeto. Dicho de otra manera, se presupone que las personas tienen una mente en la que se producen procesos mentales, y que los objetos externos a las personas generan representaciones mentales internas.

La psicología cognitiva es representacionalista: postula que la mente opera con representaciones mentales, algunas de las cuales son representaciones biyectivas de objetos exteriores.

Con relación a los símbolos mentales, los psicólogos cognitivistas creen que en la memoria a largo plazo existen imágenes mentales, otros se sitúan en el extremo contrario y afirman que sólo hay representaciones proposicionales.

Las representaciones mentales se pueden agrupar en tres tipos:

1. Las que la persona considera externas (las representaciones internas que son el resultado de la codificación de estímulos externos).
2. Las propiamente internas.
3. Las representaciones internas que sirven para realizar representaciones consideradas externas (representaciones internas que se pueden decodificar).

El triángulo de Ogden

La representación no puede estudiarse separadamente de la significación.

Si consideramos que existe un concepto matemático *A* en algún mundo platónico:

1. El concepto *A* sería el referente (exterior al sujeto y perteneciente al mundo real).
2. *B* el significante matemático (signo o símbolo).
3. *C* el concepto matemático individual del sujeto (referencia).

Ejemplo: en el triángulo de Ogden se puede representar en "*A*", la realidad sobre variables, en "*B*", el símbolo (*x*) y en "*C*", su concepto como característica susceptible de ser evaluada.

Para la psicología cognitiva, la cognición consiste en la manipulación mental de representaciones (símbolos que se refieren a "algo").

Los símbolos mentales se consideran con una cierta corporeidad (palabras pensadas, evocación de objetos, etc.).

Los objetos representados por los símbolos mentales pueden ser objetos no-ostensivos (conceptos, ideas, etc. personales al sujeto) y objetos ostensivos (con soporte material, intersubjetivos en el sentido de que se pueden mostrar a otra persona).

http://mainechess.org/images/Treasurer_Raymond_Duval.JPG

RAYMOND DUVAL

Profesor de la Universidad del Litoral y director de estudios de la Academia de Lila, Francia. Consolidó su trayectoria en el Instituto de Investigaciones en Educación Matemática (IREM de Estrasburgo) a través tanto de amplias observaciones de las actividades de docentes y alumnos en cursos de Matemáticas como del diseño de clases experimentales.

Tras sus innumerables investigaciones, Duval plantea dos preguntas que considera constituyen el núcleo del aprendizaje de la Matemática: ¿Cómo se aprende a cambiar de registro? y ¿cómo se aprende a no confundir un objeto con la representación que se propone? Según él, muchas de las dificultades en el aprendizaje de la Matemática se originan en el desconocimiento que tienen los docentes sobre los fenómenos relativos a estas cuestiones.

http://sintesis.univalle.edu.co/saladelectura/semiosis.html

Los preceptos son los objetos ostensivos que forman parte de las experiencias materiales de las personas.

Los no-ostensivos se consideran como objetos personales del sujeto.

En el proceso de instrucción se pretende que estos no-ostensivos personales se correspondan con unos no-ostensivos objetivos.

Con relación a la naturaleza de estos no-ostensivos objetivos hay básicamente dos posiciones:

1. Considerar los objetos con una existencia independiente de las personas.
2. Considerar los objetos institucionales, que son el resultado de una construcción social.

La mayoría está de acuerdo en que la naturaleza de las representaciones matemáticas ostensivas influye en el tipo de comprensión que genera el estudiante, y, recíprocamente, el tipo de comprensión que tiene determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar.

La comprensión de los estudiantes está relacionada con el incremento en el número de conexiones entre diferentes tipos de representaciones internas, lo cual se puede conseguir estableciendo conexiones y traducciones entre diferentes tipos de representaciones externas.

Para describir un objeto matemático, necesitamos de un significante (semiosis) y de un significado (noesis). En la escritura de un número, es necesario diferenciar entre la significación operatoria vinculada al significante y el número representado. La congruencia entre los registros de representación, juega también un papel importante en la comprensión de un objeto matemático. Duval señala: "En la noesis: SIGNIFICADO, la congruencia entre los registros de entrada y de salida es muy decisiva. El pasaje de una representación a otra, se hace de manera espontánea cuando existe congruencia.

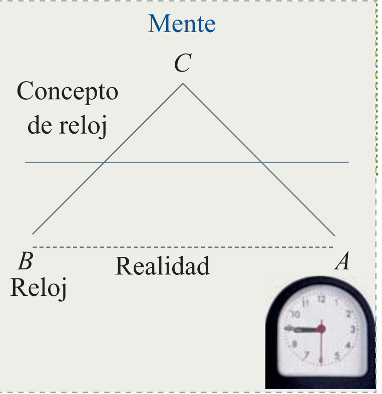
Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis (SIGNIFICANTE):

1. La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.
2. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ésta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.
3. La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...".

Duval considera que cuando se destacan las representaciones subjetivas como fuente de obstáculos en el aprendizaje, en la conceptualización triangular (objeto, representante -signo, interpretante) el interpretante toma un papel tan relevante que conduce a que las representaciones sean principalmente mentales. Es decir, se asumiría un modelo cognitivo puramente mental para analizar la adquisición del conocimiento matemático.

El progreso en la Matemática implica el desarrollo de numerosos sistemas semióticos de representación, de tal forma que cada nuevo sistema semiótico aporta nuevos significados de representación y procesos para el pensamiento matemático.

Las causas profundas de los errores, ya que siempre se cambia de sistema semiótico, es que el contenido de la representación se modifica, mientras que el objeto permanece igual.

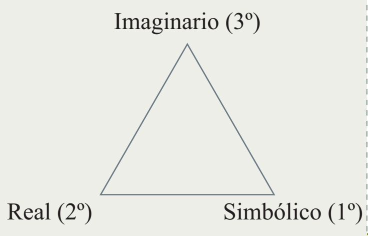


Estructura matemática

Es aquel conjunto formado por elementos tales que es posible definir una o más operaciones, incluyendo propiedades.

(Tomado de Juan Hernández, *Diccionario de Matemática).*

Considere las triadas en la Matemática



- Esto significa que como los objetos matemáticos pueden ser identificados por cualquiera de sus representaciones, al principio los estudiantes son incapaces de discriminar el contenido de la representación y el objeto representado. Es decir, para ellos los objetos cambian cuando cambia la representación.
- Lo anterior conduce a admitir lo que Duval denomina como carácter paradójico del conocimiento matemático, ya que al no poder acceder a los objetos matemáticos si no es a través del uso de signos, el objeto debe identificarse por medio de su representación, pero, al mismo tiempo, estos objetos no deben confundirse con las representaciones semióticas utilizadas.

Las representaciones según Duval

Duval clasifica las representaciones en conscientes y no conscientes. Por conscientes, entiende aquellas en las que aparece “algo”, y por no conscientes, las que se escapan completamente a la percepción del sujeto. A continuación, clasifica las representaciones en internas y externas, entendiendo por externas aquellas que son visibles y observables públicamente, y por internas, las que no son ni visibles, ni observables. Duval considera que las representaciones externas son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos y son accesibles a todos los sujetos capaces de interpretar este sistema de signos.

Las representaciones externas tienen diferentes funciones: sirven para comunicar, para objetivar y pueden ser manipuladas. A partir de estas dos clasificaciones, Duval distingue dos tipos de representaciones:

	Interna	Externa
CONSCIENTE	**mental** función de objetivación	**semiótica** función de objetivación función de expresión función de tratamiento intencional
NO-CONSCIENTE	**computacional** función de tratamiento automático o casiautomático	

Así:

- Las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática y para la comunicación.
- La formación del pensamiento científico es inseparable del desarrollo de simbolismos específicos para representar los objetos y sus relaciones.
- El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los preceptos.
- Las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientemente de las representaciones semióticas.
- La pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales.
- Es importante vincular el funcionamiento cognitivo y la utilización de varios sistemas semióticos de representación en la enseñanza para llegar a la abstracción y generalización; es decir, construir el aspecto teórico.

Signo

Señal que representa una operación o caracteriza una cantidad.

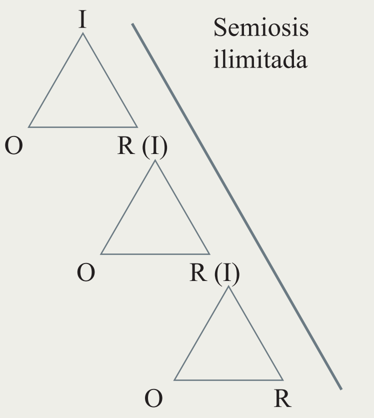
Ejemplo:

Signo mayor “ > ”

Signo menor “ < ”

Signo positivo “ + ”

Signo negativo “ – ”



- En la enseñanza de la Matemática se observa un encerramiento entre representaciones que no provienen del mismo sistema semiótico.
- El pasaje de un sistema de representación a otro, o la movilización simultánea de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recorrido intelectual, no son espontáneos o evidentes para la mayoría de estudiantes.
- Los estudiantes no reconocen el mismo objeto a través de las representaciones que pueden darse en sistemas semióticos diferentes: por ejemplo, la escritura algebraica de una relación, y su representación geométrica sobre una recta o en un plano, el enunciado de una fórmula en lenguaje cotidiano y la escritura de esta fórmula en forma literal, etc. Así, el encerramiento persiste incluso después de que en la enseñanza se hayan utilizado ampliamente diferentes sistemas semióticos de representación.
- Este fenómeno de encerramiento resulta del fenómeno de no- congruencia entre las representaciones de un objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes.
- Generalmente, el pasaje de una representación a otra se hace de manera espontánea cuando ellas son congruentes, cumpliéndose los criterios señalados anteriormente, pero cuando no se cumplen uno de los tres criterios mencionados, las representaciones no son congruentes entre sí y el pasaje de la una a la otra no es inmediato; sin embargo, puede ocurrir que dos representaciones sean congruentes en un sentido de conversión y no congruentes en la conversión inversa. Por ejemplo:

  La expresión $x \cdot y \geq 0$ representa las regiones correspondientes al primer y tercer cuadrante del plano cartesiano, puesto que por propiedad de los números reales se establece:

$$x \cdot y \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0 & \text{(Primer cuadrante)} \\ x \leq 0 \quad \wedge \quad y \leq 0 & \text{(Tercer cuadrante)} \end{cases}$$

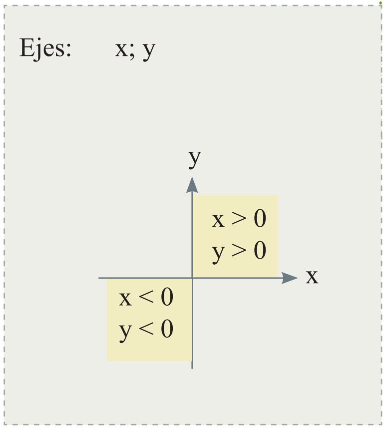
  De ello se desprende que hay que tener presente al momento de la enseñanza el cambio de sistema semiótico de representación. Realice tareas en las cuales la conversión de representaciones sea congruente, preferentemente, pues las tareas en la cual la conversión no es congruente se torna un poco difícil, según el grado de no congruencia.

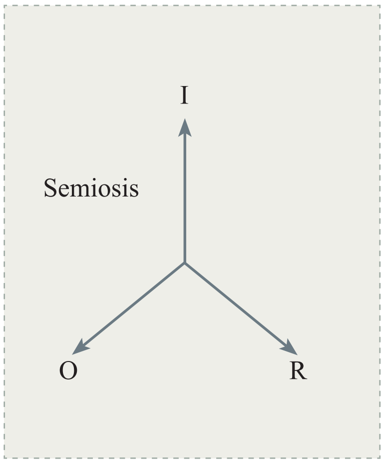
  El desarrollo de desempeños está fuertemente ligado a la coordinación de sistemas semióticos (diversidad de los sistemas de representación, utilización de sus posibilidades propias, comparación por la puesta en correspondencia, y "traducciones" mutuas) en los estudiantes.

  La comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento, las interpretaciones- hermenéutica y heurística – de los enunciados están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi - inmediatas de algunos registros de representación semiótica.

  Como ya se ha mencionado también en el tratamiento de los diferentes registros de representación semiótica, es importante ver su relación. En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, el tratamiento de una representación en el registro verbal implica otro en el algebraico, pero no en el gráfico. A continuación, aparece un ejemplo de coordinación entre las representaciones de los tres registros.

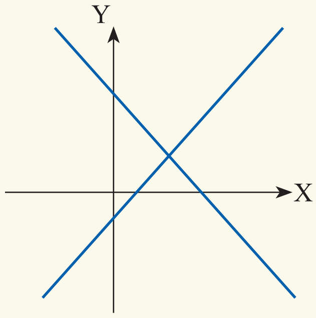
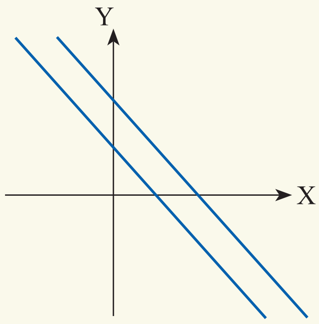
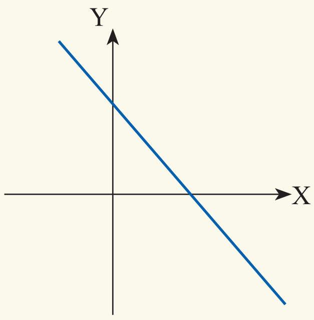
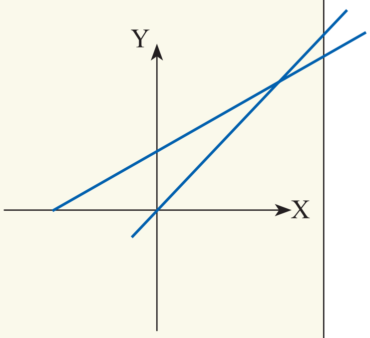
  La siguiente tabla muestra las diferentes representaciones de un objeto matemático (sistemas de ecuaciones lineales) en distintos registros de representación semiótica:

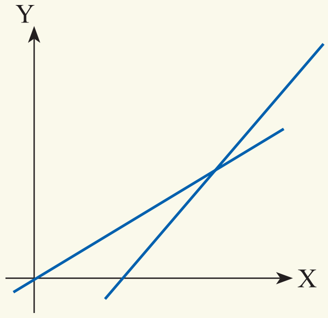




Un mate... de risa

– ¿Cuántas naranjas nos quedarán si tenemos diez naranjas y nos comemos cuatro?
– Lo siento, «profe», pero sólo sé operar con manzanas.

	Representación		
Objeto matemático	Registro verbal	Registro algebraico	Registro gráfico
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; su solución es un conjunto unitario.	Si los lados de un rectángulo se alargan 2 centímetros cada uno, el perímetro es de 24 centímetros. Si se sabe, además, que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 centímetros, ¿cuánto miden los lados del rectángulo?	$2(x+2)+2(y+2)=24$ $x-y=2$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; su solución es un conjunto vacío.	La suma de dos números es 1 000 y el doble de su suma da 700. ¿Cuáles son esos números?	$\begin{cases} x+y=1\,000 \\ 2(x+y)=700 \end{cases}$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; su solución es un conjunto infinito.	El perímetro de un triángulo isósceles es 18 centímetros. Si se suma la medida de uno de los lados congruentes a la mitad de la medida del lado no congruente, se obtiene 9. ¿Cuál es la medida de cada lado del triángulo?	$\begin{cases} 2x+y=18 \\ x+\frac{1}{2}y=9 \end{cases}$	
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	El valor de la entrada al teatro cuesta el doble del valor de la entrada a la discoteca. Además, la entrada al teatro cuesta 5 soles más que la entrada a la discoteca. ¿Cuánto cuestan las entradas al teatro y a la discoteca?	$\begin{cases} x=2y \\ x=y+5 \end{cases}$	
	El valor de la entrada a la discoteca cuesta la mitad del valor de la entrada al teatro. Además, la entrada a la discoteca cuesta 5 soles menos que la entrada al teatro. ¿Cuánto cuestan las entradas al teatro y a la discoteca?	$\begin{cases} y=\dfrac{x}{2} \\ y=x-5 \end{cases}$	

	Representación		
Objeto matemático	Registro verbal	Registro algebraico	Registro gráfico
Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	El valor de la entrada al teatro menos el doble del valor de la entrada a la discoteca es cero. Además, la diferencia entre el valor de la entrada al teatro y el valor de la entrada a la discoteca es 5 soles. ¿Cuánto cuestan las entradas al teatro y a la discoteca?	$\begin{cases} x-2y = 0 \\ x-y = 5 \end{cases}$	

Si se logra un pasaje fluido entre registros y un tratamiento natural en ellos, se le permitirá al estudiante que examine sus ideas y controle sus resultados. Esta es una de las bases para la construcción de la situación que involucra al objeto, ya que el cambio de registro constituye una variable que se revela fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje, pues ofrece procedimientos de interpretación.

En general, la enseñanza de la Matemática se organiza como si la coordinación entre los distintos registros de representación semiótica fuera rápida y natural.

Convertir es cambiar la forma por la cual un objeto es representado, o sea, es la transformación de la representación de un objeto que está en un registro en una representación del mismo objeto en otro registro.

El trabajo con los tres registros de representación facilita que el estudiante identifique al objeto en todos los registros, ya que se emplean en forma indistinta para simbolizarlo, buscando desarrollar en él, comportamientos matemáticos y cognitivos. Al respecto, habría que realizar tratamientos y pasajes de registro de representación semiótica, así como observar la coordinación entre los diferentes registros.

El pasaje de un registro a otro algunas veces es natural y otras no; este último caso resulta del fenómeno de no-congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes.

Tal proceso se hace de manera más espontánea cuando las representaciones son congruentes y cumplen tres condiciones:

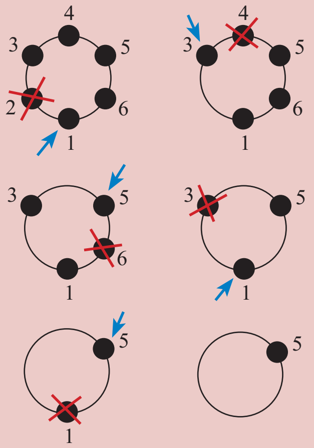
1. Correspondencia semántica entre las unidades significantes: a cada unidad significante simple de uno de los registros le corresponde una unidad significante simple en el otro.
2. Orden: el mismo orden de aprehensión de las unidades significantes.
3. Univocidad semántica terminal: a cada unidad en el registro de partida le corresponde una en el de llegada.

Para una asimilación conceptual de un objeto, además de lo ya expuesto, es necesario que el objeto no se confunda con sus representaciones, pero debe ser reconocido en cada una de ellas.

curiosidades matemáticas

Fichas saltarinas

Se colocan 6 fichas en círculo y se numeran del 1 al 6 consecutivamente. Ahora, en el sentido de numeración, voy dejando una ficha y quitando la siguiente. Empiezo dejando la ficha 1 y quitando la 2. El proceso continúa hasta que sólo queda una ficha. En la figura vemos que al final del proceso la ficha final es la número 5.



a. Haz tú lo mismo con 8 fichas en círculo. ¿Qué ficha queda al final?

b. Si comenzamos con 16 fichas, ¿qué ficha queda al final?

c. Los números 8 y 16 son potencias de 2. También el número 1024 = es una potencia de 2. ¿Sabrías decirnos, con un razonamiento convincente, qué ficha quedaría al final si comienzas con un círculo de 1 024 fichas?

d. Ahora tienes 1 026 = $2^{10} + 2$ fichas. ¿Qué ficha quedaría al final? Indícanos las razones de tu repuesta.

e. Si tienes $2^n + 2$ fichas: ¿Qué ficha quedaría al final? Indícanos las razones de tu respuesta.

En los casos a y b queda la ficha nº 1. También en el caso c porque, al ser una potencia de 2, cada vez van quedando la mitad de las fichas que había en la vuelta anterior y siempre el 1. Así, al final queda el 1. Puede razonarse fácilmente por inducción.

Si hay $2^{10} + 2$, después de la primera vuelta quedan $2^9 + 1$ fichas, habiendo tachado al final la última y manteniéndose el 1. A la siguiente vuelta se tacha el 3 y al final se tacha el 1, quedando el 5 sin tachar y con fichas. Estamos en el caso anterior y la ficha que queda es el 5.

http://thales.cica.es/estalmat/Pruebas-04-06-05.pdf

Según Duval (1999), para que un sistema semiótico (entendido como el conjunto de signos y reglas que representan objetos, donde los signos son las unidades elementales del sistema y las reglas ordenan las asociaciones de signos) pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

1. La formación de una representación identificable como imagen de un registro dado.
2. El tratamiento de una representación a través de un proceso interno, que implica sus transformaciones en el mismo registro donde ha sido formado.
3. La conversión de una representación que conlleva su cambio –externo al registro de partida– hacia una de otro registro, conservando la totalidad o sólo una parte del contenido de la representación inicial. Dicha actividad es diferente e independiente a la del tratamiento.

De las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis, según Duval, sólo las dos primeras son tomadas en cuenta en la enseñanza.

Toda representación es parcialmente cognitiva respecto a lo que representa. Pero además, de un registro a otro no son los mismos aspectos del objeto lo que se representa, de ahí que los distintos registros sean complementarios. La conceptualización implica una coordinación de registros de representación, por lo que la comprensión de un objeto matemático reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación.

Actividad 1

Analiza la teoría de los registros semióticos y los aprendizajes intelectuales según Raymond Duval, valorando su utilidad.

en grupo...

investiga *con tus colegas*

En grupo de cuatro integrantes, desarrollen la presente actividad. Comunica asertivamente tus ideas, tus inquietudes y tus respuestas, respetando los diferentes puntos de vista.

1. Discute con tus colegas sobre las pautas que debemos seguir para cambiar de un registro a otro y específicamente en el planteo de ecuaciones. ¿Cómo pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico?
2. **Cuestión inicial**

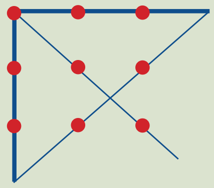
   Se debería hacer énfasis en el uso de los gráficos a la hora de introducir a los estudiantes en el Álgebra por primera vez. Es sabido que algunos estudiantes comprenden mejor una relación si se les dibuja, por tanto, deberían usarse los gráficos desde el principio. La mayoría de los estudiantes tienen problemas en escribir correctamente la ecuación correspondiente a un determinado enunciado verbal. Dibujar el gráfico correspondiente a ese enunciado verbal es un buen ejercicio intermedio y hace que los estudiantes desarrollen el pensamiento abstracto.

   A continuación, presentamos un problema en el que deberás hacer primero un esquema gráfico y luego buscar la estrategia adecuada (a modo de entrenamiento).

   Problema:

   Un estudiante está ubicado en la tercera columna de la tercera fila en un batallón de 3x3 para el desfile escolar. Dicho estudiante no desea desfilar y su instructor le ha dicho lo siguiente: “Traza cuatro segmentos rectilíneos, que sean horizontales, verticales y oblicuos, es decir, en las cuatro direcciones posibles, que pasen sólo una vez por los nueve estudiantes que conforman el batallón, y sólo así serás exonerado”. ¿Cómo lo hará?
3. Usando el problema anterior ¿Cómo podría plantearle usted el hecho de que encuentre ahora, las ecuaciones de cada segmento de recta?

   Para resolver el problema considere este diagrama.



2. El ÁLGEBRA *y las* ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

2.1 El Álgebra como instrumento de modelización matemática

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de la Matemática. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de la Matemática concebido como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de la Matemática en la que formalizar y generalizar no sea central.

En consecuencia, los docentes tienen que construir esta visión del papel central de las ideas algebraicas en la actividad matemática, y sobre cómo desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles.

Algunas características del razonamiento algebraico que son sencillas de adquirir por los estudiantes, y por tanto deben conocer los docentes, son:

1. Los patrones o regularidades que existen y aparecen de manera natural en la Matemática. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.
3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.
4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

Con relación a la segunda característica, hay que destacar que entre los símbolos que usamos para expresar las generalizaciones de patrones y relaciones, sobresalen los que permiten representar variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones.

Con relación a la tercera característica, hay que destacar que las variables

curiosidades matemáticas

Adivinanza con el dominó

Planteamiento del juego

En este juego hay un "jugador" que manipula las fichas y un "adivinador" que no está presente en el juego y que sólo interviene al final. Se ponen todas las fichas del dominó boca abajo y el jugador procede de la siguiente manera:

Toma una ficha, la mira y separa del montón tantas fichas como resulte de restar 12 menos la suma de los tantos de la ficha mirada. (Ejm. Si toma el 3 – 4, aparta 5 fichas, si toma el 6 – 6, no aparta ninguna).

Se repite sucesivamente esta operación, quedando siempre en la mesa tres montones de fichas (todas boca abajo):

- Montón *A*: el original del que se van tomando fichas.
- Montón *B*: conjunto de fichas que ha ido mirando el jugador.
- Montón *C*: conjunto de fichas que se han ido apartando.

El juego se detiene cuando al tomar una ficha no haya en *A* fichas suficientes para pasarlas a *C*. En este caso se pasan las que hay, y se devuelven de *C* a *A* las que faltan para completar la última operación.

Quedan así, al final, *m* fichas en *A* (las que fueron devueltas desde *C* en la jugada anterior), *n* fichas en *B* y, obviamente, 28-m-n fichas en *C*. En este momento el adivinador, que no ha estado presente en ningún momento del juego, observa la situación y "adivina" la suma de los tantos que hay en *B*, conjunto de fichas que ha ido tomando el jugador.

tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como representaciones de cantidades que varían o cambian, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula.

Respecto a la cuarta característica, hay que destacar que todas las representaciones de una función dada son simplemente maneras diferentes de expresar la misma idea.

Aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación gráfica conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la Geometría y la Topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La fórmula conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el Álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres.

Algunas características del Álgebra que son fáciles de apreciar son:

- El uso de símbolos, habitualmente letras, que designan elementos variables o genéricos de conjuntos de números, u otras clases de objetos matemáticos.
- La expresión de relaciones entre objetos mediante ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de unas reglas sintácticas de transformación de las expresiones.

Pero estas características del Álgebra son sólo su parte superficial. La parte esencial la constituye la actividad que se hace con estos instrumentos:

Las variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones que se pueden realizar con estos medios, son instrumentos de modelización matemática de problemas procedentes de la propia Matemática (aritméticos, geométricos), o problemas aplicados de toda índole (de la vida cotidiana, financieros, físicos, etc.). Cuando estos problemas se expresan en el lenguaje algebraico producimos un nuevo sistema en el que se puede explorar la estructura del problema modelizado y obtener su solución. La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.

Esta visión ampliada del Álgebra como instrumento de modelización matemática es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos, puesto que la modelización algebraica es una cuestión de grado. Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones e identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización.

La identificación y designación de las variables que caracterizan el sistema es el primer paso de la modelización matemática, que vendrá seguido del establecimiento de relaciones entre dichas variables. Lo primero que se trabaja, entonces, es el modelo, la manipulación formal de las expresiones simbólicas que muestra las propiedades del sistema modelizado y ello

curiosidades **matemáticas**

Adivinanza con el dominó

¿Cómo puede hacer esto?

Cada vez que se mira una ficha pasan de *A* a *C* 12 menos la suma de los tantos. Entonces la suma de los puntos en *B* (el número *x* que se adivina) más el número de fichas en *C* debería ser $12n$, si al final no faltase ninguna ficha. Pero como hay que pasar m fichas de *C* a A, para que salga la cuenta debería haber en *C*, además de las que hay $(28 - m - n)$, $2m$ más. Luego ha de ser:

$x + (28 - m - n) + 2m = 12n$, es decir, $x = 13n - m - 28$

Se puede dar una solución tabulada:

n	Suma
3	$11 - m$
4	$24 - m$
5	$37 - m$
6	$50 - m$
7	$63 - m$
8	$76 - m$
9	$89 - m$

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/01_2_p.htm permite obtener nuevos conocimientos sobre el mismo.

Para entender un fenómeno matemático, se construye un modelo matemático, de ésta manera la Matemática progresa.

2.2 La abstracción y las estructuras algebraicas

Fueron los griegos quienes sistematizaron la Matemática, pasando de aplicaciones prácticas y útiles a generalizaciones. El matemático, desde entonces se ocupa más de conceptos abstractos, esto es, trabaja con ideas que paulatinamente van encontrando niveles de abstracción mayores; y es en esta dirección donde se presentan las diversas estructuras algebraicas finalmente, a partir de sistemas axiomáticos que cobraron vigencia en los últimos siglos.

Hoy, la Matemática entendida como la ciencia de la cantidad resulta insuficiente, ya que el concepto de estructura ha modificado este entendimiento de ella; mas, por el contrario, según Traclane: “La Matemática consiste en el descubrimiento de sucesivos niveles de las estructuras formales subyacentes en el mundo y en las actividades humanas”. Como podemos apreciar, sigue vigente como estudio de las estructuras entendidas como conjunto de elementos dotados de una relación.

Ahora, de lo que se trata es presentar una diversidad de situaciones que involucran el tratamiento de las estructuras algebraicas entendidas como objetos matemáticos consistentes en conjuntos no vacíos, y leyes de composición interna definidas en los mencionados conjuntos que cumplen ciertos axiomas.

A medida que van cumpliendo determinados axiomas, iremos denominándolos estructuras algebraicas de semigrupo, semigrupo abeliano, monoide, monoide abeliano, grupo, grupo abeliano, entre otros.

Situación 1

¿Qué significado tiene el par (X, +) en una estructura algebraica denominada semigrupo?

Significa valorar la generalidad sobre la particularidad, y en Matemática es importante llegar a las generalizaciones desde las particularizaciones.

Por ejemplo, el conjunto $X \neq \varnothing$ puede representar cualquiera de los conjuntos numéricos como: los naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$,los racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$, esto es.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \\ & \mathbb{Z} \\ \mathbf{X} \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Q} \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

La operación “+” es la adición usual definida en cualquiera de los conjuntos numéricos que cumplen con la propiedad de la asociatividad. Esto es:

$\forall$ a, b, c $\in$ X, se tiene que: (a + b) + c = a + (b + c)

Un mate... de risa

– ¿Te gustan los polinomios?
– Sí, pero sólo hasta cierto grado.

Sistema axiomático

Un sistema axiomático en Matemática considera:

1. Términos primitivos conformados por elementos, conjuntos o relaciones no definibles.
2. Definiciones.

   Conceptos de todos los términos no primitivos.
3. Axiomas.

   Propiedades que deben satisfacer los términos primitivos.
4. Teoremas.

   Propiedades que se ofrecen en los axiomas.

(Realizado a partir del aporte de Armando Rojo, *Álgebra 1*).

Para cada uno de los conjuntos numéricos presentados en la sección anterior tendremos:

* $(\mathbb{N}, +)$ es semigrupo, porque $a + (b + c) = (a+ b) + c \;\; \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$
* $(\mathbb{Z}, +)$ es semigrupo, porque $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$
* $(\mathbb{Q}, +)$ es semigrupo, porque $(a + b) + c = a + (b + c), \forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$
* $(\mathbb{R}, +)$ es semigrupo, porque $(x + y) + z = x + (y + z), \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

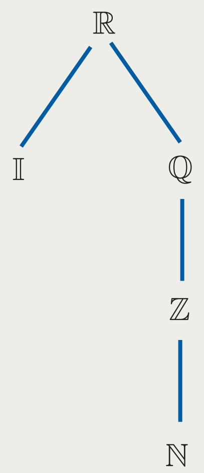


Diagrama lineal de conjuntos numéricos.

Situación 2

¿Por qué es importante conceptualizar al par (A, +) como una estructura algebraica denominada monoide?

Porque es entender la Matemática como una ciencia que contribuye a formar la mente de los seres humanos y prioriza la cuestión general para expresarla en principios y leyes a partir de experiencias particulares, tal como veremos en seguida.

Así, el conjunto $A \neq ø$ puede representar a cualquiera de los conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, y la operación "+" es la adición usual definida en cualquiera de los conjuntos numéricos indicados, que cumple con los axiomas de: clausura, asociatividad y el de la existencia del elemento identidad. Esto es: $\forall\, x, y, z \in A$

* $x + y \in A$
* $(x + y) + z = x + (y + z)$
* $\forall\, x \in A, \exists\,!\, 0 \in A \,/\, x + 0 = x$

Donde para cada uno de los conjuntos numéricos tendremos que:

* $(\mathbb{N}, +)$ es monoide; porque:

  $a + b \in \mathbb{N}$
  $(a + b) + c = a + (b + c)\,;\, \forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ y $0 \in \mathbb{N}$
  $a + 0 = a$

* $(\mathbb{Z}, +)$ es monoide, porque:

  $a + b \in \mathbb{Z}$
  $a + (b + c) = (a + b) + c\,;\, \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $0 \in \mathbb{Z}$
  $a + 0 = a$

* $(\mathbb{Q}, +)$ es monoide, porque:

  $a + b \in \mathbb{Q}$
  $(a + b) + c = a + (b + c)\,;\, \forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$ y $0 \in \mathbb{Q}$
  $a + 0 = a$

* $(\mathbb{R}, +)$ es monoide, porque:

  $a + b \in \mathbb{R}$
  $a + (b + c) = (a + b) + c\,;\, \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ y $0 \in \mathbb{R}$
  $a + 0 = a$

importante

	Monoide	Grupo
Clausura	x	x
Asociativa		x
Existencia del elemento neutro		x
Existencia del elemento inverso		x

Situación 3

¿Por qué el par (X, •) no es una estructura algebraica denominada grupo? Porque en el par (X, •) no se cumplen algunos de los axiomas establecidos para la estructura algebraica de grupo. Esto es:

$\sigma 1$: $a \bullet b \in X$, $\forall$ a, b, $\in X$

$\sigma 2$: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$, $\forall$ a, b, c $\in X$

$\sigma 3$: $\forall\, a \in X$, $\exists !\, b \in X$ / $a \bullet b = a$, b es el elemento identidad

$\sigma 4$: Para cada $a \in X$, $\exists !\, c \in X$ / $a \bullet c = b$ y b es el elemento identidad

Así, el conjunto $X \neq \emptyset$ puede representar a cualquiera de sus conjuntos numéricos como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, y la operación "•" Es la multiplicación usual definida en cualquiera de los conjuntos numéricos anteriores.

No cumple alguno o algunos de los axiomas para un grupo, es decir:

* ($\mathbb{N}$, •) no es grupo, porque no cumple la propiedad para cada $a \in \mathbb{N}$, $\nexists !\, b \in \mathbb{N}$ / $a \bullet b = 1$
* ($\mathbb{R}$, •) no es grupo, porque no cumple la propiedad para cada $a \in \mathbb{R}$, $\nexists !\, b \in \mathbb{R}$ / $a \bullet b = 1$
* ($\mathbb{Q}$, •) no es grupo, porque no cumple la propiedad para cada $a \in \mathbb{Q}$, $\nexists !\, b \in \mathbb{Q}$ / $a \bullet b = 1$
* ($\mathbb{Z}$, •) no es grupo, porque no cumple la propiedad para cada $a \in \mathbb{Z}$, $\nexists !\, b \in \mathbb{Z}$ / $a \bullet b = 1$

Como podemos apreciar, basta que una propiedad de la estructura de grupo no cumpla para concluir que el par establecido, en este caso (X, •) no es grupo. Es fundamental que se tenga presente en la Matemática, esta situación, y en la vida diaria; ya que basta que no cumpla un solo caso de generalidad, para establecer que no se cumple; a ello, en Matemática lo denominamos: "Demostración por el contraejemplo". Procedimiento que debe ponerse en práctica en muchos temas de Matemática, que consiste en presentar ejemplos que no cumplan en una situación general para establecer que no es una ley.

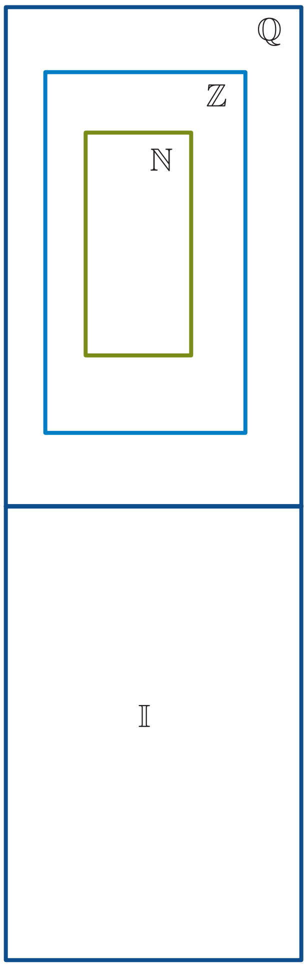


Diagrama conjuntista de conjuntos numéricos.

Actividad 2

Analiza las estructuras algebraicas a través de la interpretación de situaciones y reconoce al Álgebra como un instrumento de modelización matemática, manifestando sentido crítico.

en grupo...
investiga *con tus colegas*

1. Discute con tus colegas y responde:

   En el fascículo 1, que corresponde a Didáctica de la Matemática, en la actividad 4 se te propuso determinar el tamaño real de la foto y determinar el radio *r* del círculo exterior.

   Seguramente con tus colegas pudieron haber llegado a:

$$\frac{90}{2-\sqrt{2}},\ \frac{45\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1},\ 45(2+\sqrt{2})$$

   ¿Cómo puedes modelizar las expresiones? ¿Por qué la tercera expresión da una mejor aproximación por exceso?

2. Intercambio de fichas

   Se tiene tres fichas blancas (0) y tres fichas negras (X) en la siguiente posición:

0	0	0
X	*X*	*X*

   Se trata de intercambiar las fichas blancas y negras para llegar a la posición final, descrita más abajo, en el menor número de movimientos. Blancas y negras se mueven por turnos hacia cualquier cuadrado adyacente que esté desocupado, en horizontal, vertical o diagonal.

X	*X*	*X*
0	0	0

   - En este caso el mínimo número de movimientos es siete. ¿Cuáles son?
   - Encontrar una estrategia para resolver el juego en el caso general de *n* fichas blancas y *n* negras. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos en este caso?

3. Dado el par (X, *), donde X = {a; b; c; d} y $*: X \times X \rightarrow X$, definido por la tabla:

*	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	b	c	d	c
d	c	d	b	b

   ¿El par (X, *) es monoide?, ¿cuál es el elemento identidad?

   Sugerencia: Aplica el axioma de identidad para la estructura algebraica de monoide.

4. ¿Por qué el par ($\mathbb{R}$, •) no es grupo? Donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales y • : $\mathbb{R} * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (a; b) $\rightarrow$ a • b (la multiplicación usual).

   Sugerencia: Aplica los axiomas de la estructura algebraica de grupo.

5. Busca situaciones referentes a estructuras algebraicas abelianas aplicables en el aula. Destaca el axioma fundamental que los caracteriza.

3. *Los* SÍMBOLOS *como* REPRESENTACIONES *de* OBJETOS *y los* SÍMBOLOS *como* OBJETOS

3.1 Los símbolos matemáticos

En la secundaria, el uso de las expresiones algebraicas (expresiones con letras, operaciones y números) aumentan considerablemente y los estudiantes empiezan a utilizar, entre otras, identidades notables (por ejemplo, el cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$), ecuaciones (por ejemplo, $3x + 2 = 5$) y polinomios (por ejemplo, $2x^3 + 3x + 7$).

El camino que va desde la manipulación, por ejemplo, de fórmulas geométricas para hallar longitudes y áreas, de la suma y el producto de polinomios, es un camino largo, complejo y lleno de dificultades. En este camino conviene distinguir dos etapas.

1. En la primera, los símbolos substituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos. En esta etapa los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. Los valores que pueden tener los símbolos son los que permiten los objetos y la situación representan.

2. En una segunda etapa los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban.

   Ahora, los símbolos se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones e incluso se puede prescindir de los objetos, relaciones y situaciones que representan.

Los diferentes psicólogos han considerado los procesos de simbolización, abstracción y generalización. Piaget considera que las características del segundo nivel corresponden a la etapa de las operaciones formales (a partir de los 12 años, aproximadamente).

Símbolos importantes

Representaciones iniciales de ideas y pensamientos del mundo terrestre y celestial.

Tomado de CARL BOYER, Historia de la Matemática.

curiosidades matemáticas

Las cifras

Desde la antigüedad, el hombre ha inventado métodos para poder contar las cosas. Los romanos utilizaron algunas letras mayúsculas del alfabeto latino (I, V, X, L, C, D, M) para representar números.

Nosotros representamos los números mediante unos símbolos o signos denominados cifras. Nuestro sistema actual de numeración utiliza diez cifras: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 y 9, que también se llaman dígitos, por su relación con el número de dedos de las manos.

Estas diez cifras son de origen indo-arábigo (hindú y árabe). Los árabes usaban las cifras del 1 al 9 y, en sus relaciones comerciales con la India, conocieron que los matemáticos hindúes usaban el cero y lo incorporaron a su sistema de numeración que es el que usamos actualmente.

Los hindúes denominaban al cero «*sunya*» que quiere decir «vacío». Los árabes lo denominaron «*sirf*» (vacío, en árabe). Esta palabra árabe, nombre del cero, se aplicó posteriormente a las demás cifras, dando origen a las palabras castellanas cero y cifra.

Un mate... de risa

Dos amigos se encuentran por la calle y le dice uno al otro:

– ¿Puedo confiarte un secreto?
– Por supuesto, somos amigos.
– Necesito 6 500 euros.
– Tranquilo, como si no me hubieses dicho nada.

Actividad 3

Resuelve las siguientes situaciones formuladas y socializa las respuestas obtenidas.

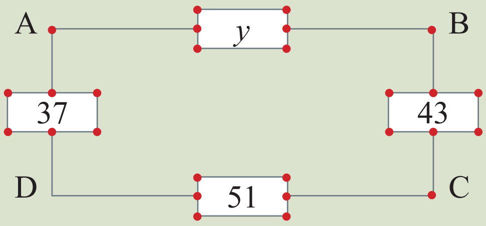
1. Un trabajador gana 6,40 soles por hora de trabajo ordinaria, mientras que las horas extraordinarias que trabaje por encima de 40 horas semanales las cobra a la mitad de las horas ordinarias. ¿Cuántas horas extraordinarias debe trabajar para ganar 352 soles a la semana?
2. En el último año el salario bruto de Carlos se redujo un 35% por impuestos, seguros, etc. Este año ha recibido un 6% de incrementos en el salario bruto, pero las deducciones han subido al 37%. ¿En qué porcentaje se ha incrementado su salario neto?
3. Resuelve las siguientes inecuaciones, representa sobre la recta numérica el conjunto solución e identifica las transformaciones de equivalencia que se aplican:

   a. $5(6x + 3) \leq 3$

   b. $x(3 + x) > x^2 + 5x - 12$

   c. $(x + 2)^2 < x^2 + 22$

4. En cada vértice del rectángulo ABCD, ubicar un número, de manera que la suma de los números de dos vértices consecutivos sean iguales a los números que se ubican en los lados del rectángulo. ¿Para qué valores de "y", es posible esto?



   Sugerencia: Establece ecuaciones y resuélvelas.

5. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales por cuatro métodos diferentes:

$$\begin{cases} 2c + 5d = 25 \\ 3c - 4d = -3 \end{cases}$$

en grupo...

investiga con tus colegas

En un mercado, un hombre gastó S/. 100 comprando unidades de tres clases de artículos, que denominaremos A, B, y C. Compró en total 100 artículos. Si el precio de cada artículo A era de S/. 10 soles, el de cada uno de B de S/. 3 y el de cada uno de C era de S/. 0,50: ¿Qué valores toman A, B y C?

Sugerencia: Establece un sistema de ecuaciones y determina su conjunto solución.

4. SITUACIONES DIDÁCTICAS *en el* ESTUDIO *del* ÁLGEBRA

La teoría de situaciones didácticas se ocupa de los procesos para desarrollar y observar los comportamientos matemáticos en el alumno, mientras que para los procesos cognitivos contamos con la teoría de registros de representación semiótica.

Desde la teoría de situaciones se observará, en general, el diseño de actividades que permitan el desarrollo de las fases de acción, formulación y validación. Es importante que se den en tal orden (previendo, naturalmente, las dialécticas entre una y otra).

La teoría de registros de representación semiótica permitirá analizar las actividades que se desarrollen en diferentes registros y los pasajes entre ellos en ambos sentidos. Se prestará atención especialmente a proponer ejercicios que requieran de pasajes entre representaciones no congruentes (según el sentido de conversión) ya que, como dice Duval, *"...un cambio de registro resulta interesante y fecundo cuando los tratamientos en dos registros diferentes no son computacionalmente equivalentes, es decir, no son congruentes"* (Duval, 1999, p. 53).

importante

Validación

↑

Formulación

↑

Acción

Fases de la teoria de situaciones.

4.1 Situación didáctica: descubriendo un sistema de ecuaciones con dos incógnitas

1. TEMA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.
2. EXPECTATIVA DE LOGRO DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA:

   Destreza: Analiza (razonamiento y demostración)

   – Reconoce un sistema de ecuaciones con dos variables en situaciones de su vida diaria.
3. MÉTODOS, PROCEDIMIENTOS Y TÉCNICAS SUGERIDAS:

   Inductivo-deductivo, "*tándem*", interrogación didáctica, lluvia de ideas, entre otros.

4. MEDIOS Y MATERIALES:

   - Hojas estructuradas.

Pueden utilizar la siguiente ficha de trabajo para trabajar con sus estudiantes.

FICHA DE TRABAJO

Lee atentamente y responde a las preguntas planteadas:

1. Dos recipientes *A* y *B* contienen leche, si sabemos que los litros que contienen *A* y *B* suman 30 litros:
   a. Represente en el lenguaje simbólico (lenguaje matemático) el enunciado anterior.
      – ¿Cómo clasificarías a la ecuación planteada?
   b. ¿Cuáles son las posibles soluciones de la ecuación planteada en a?
      En la siguiente tabla ordena algunos valores que pueden tomar las variables de la ecuación.

Variables — posibles soluciones

   c. Teniendo en cuenta la tabla, realiza la gráfica correspondiente en el plano cartesiano.
   d. ¿Podemos saber exactamente cuántos litros de leche contiene cada recipiente? ¿Por qué?
2. Si extraemos 2 litros de leche del recipiente *B* y lo vertimos al recipiente A, éste tendrá 6 litros más que *B*.
   a. Representa simbólicamente el enunciado anterior.
      – ¿Cómo clasificarías a la ecuación planteada?
   b. Reduce la ecuación.
   c. ¿Cuáles son las posibles soluciones de la ecuación obtenida en a?
      En la siguiente tabla ordena algunos valores que pueden tomar las variables de la ecuación.

Variables — posibles soluciones

   d. Teniendo en cuenta la tabla, realiza la gráfica correspondiente en el plano cartesiano.
   e. ¿Podemos saber exactamente cuántos litros de leche contiene cada recipiente? Explica.
3. Ahora una las ecuaciones obtenidas de 1 y 2, analiza y responde:
   a. Tomando las dos ecuaciones obtenidas en a, ¿podemos calcular cuántos litros de leche hay en cada recipiente?
   b. Explica: ¿cuál sería el procedimiento para obtener la respuesta?

5. APLICACIÓN: (SITUACION DIDÁCTICA).

Acción:

- Se les presenta las hojas de trabajo, enseguida ellos individualmente se enfrentan al problema.
- Los alumnos trabajan en la ficha de trabajo presentada tratando de dar respuestas a las interrogantes allí planteadas, utilizando sus conocimientos previos.

Formulación:

Se intercambian las informaciones obtenidas y se crea un lenguaje formal, adecuado, simple y coherente para explicar a los demás los procedimientos que se realizaron de una manera entendible.

Los alumnos cotejan los resultados y estrategias empleadas para así escoger la más acertada y llenar en la hoja grupal.

Validación:

Para validar los intercambios de información procesada se requiere de una situación teórico-práctica de los contenidos matemáticos utilizados.

Probar lo que se afirma, significa fundamentar el contenido matemático basándose en las etapas de acción y formulación.

Institucionalización:

- Saber científico
- Saber del aprendizaje
    - Utilidad.
    - Representaciones.

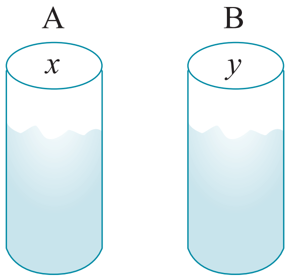
Evaluación

Después de haber formalizado y haber trabajado ejercicios y problemas se verifica el aprendizaje de los estudiantes.

- Análisis a-priori de la situación didáctica.

  Aquí se hace la solución previa de la ficha de trabajo propuesta a los alumnos, para sacar el máximo provecho posible a la situación durante el trabajo en el aula. Veamos:

1. a.



$x + y = 30$, es una ecuación de primer grado con dos variables.

b. $x + y = 30$

Veamos: Si $x = 15$; $y = 15$

Si $x = 16$; $y = 14$

Si $x = 17$; $y = 13$

Si $x = 14$; $y = 16$

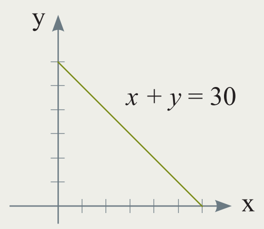
Si $x = 13$; $y = 17$

El trabajo en clase

En la aplicación de una situación didáctica, existe un intercambio dinámico entre los estudiantes. Sin embargo, para que el desarrollo de esta situación ofrezca los frutos esperados y cumpla con el objetivo propuesto de manera idónea, es imprescindible establecer un ambiente de trabajo ameno, y exento de alteraciones y comportamientos que puedan dificultar la correcta aplicación de una situación didáctica.

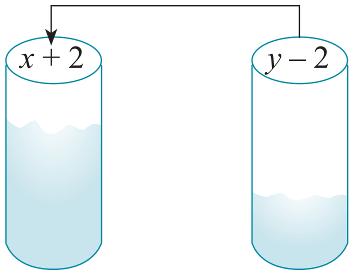
El docente debe procurar transmitir, a través de ejemplos y consejos, los valores morales necesarios para que al momento de realizar actividades en clase, éstas se efectúen sin alteraciones.

Reprentación gráfica en R^2 de la situación 1. a planteada en la ficha: $x + y = 30$



c. No podemos saber cuántos litros de leche contiene cada recipiente puesto que la ecuación formada es una ecuación de primer grado con dos variables, y tiene infinitas soluciones.

2. d.



$x + 2 = y - 2 + 6$

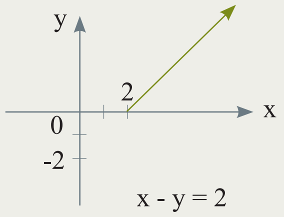
Es una ecuación de primer grado con dos variables.

e. $(x + 2) = (y - 2) + 6$

$x - y = 4 - 2$

$x - y = 2$

Representación gráfica en R^2 de:
x - y = 2



f. Veamos:

Si $x = 15$; $y = 13$
Si $x = 16$; $y = 14$
Si $x = 17$; $y = 15$
Si $x = 14$; $y = 12$
Si $x = 13$; $y = 11$

g. No podemos saber cuántos litros de leche contiene cada recipiente puesto que la ecuación formada es una ecuación de primer grado con dos variables, y tiene infinitas soluciones.

h. $\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Sí podemos calcular los litros de leche que hay en cada recipiente.

- Análisis a posteriori de la situación didáctica.

Aquí se inducirá a los alumnos a partir del trabajo anterior para la formalización del tema. Veamos:

En primer lugar se pregunta: ¿Qué nombre le pondrían a las dos ecuaciones juntas? Con ayuda de ellos anotaremos el título de la sesión.

En segundo lugar, induciremos a los alumnos a utilizar el método de reducción; sacando el máximo provecho posible a la situación, así:

$$\begin{cases} x + y = 30 \;\; (1) \\ x - y = \;\; 2 \;\; (2) \end{cases}$$

Sumamos la ecuación miembro a miembro ya que para la variable y éstas tienen coeficientes opuestos y determinamos el valor de x:

$$\begin{array}{r} x + y = 30 \\ \underline{x - y = \;\; 2} \\ 2x + 0 = 32 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x = 32 \\ x = \dfrac{32}{2} \\ x = 16 \end{array}$$

De aquí deducimos que el recipiente A contiene 16 litros de leche.

Ahora, para saber cuántos litros de leche contiene el recipiente B utilizamos la primera ecuación:

$x + y = 30$

Como $x = 16$, lo reemplazamos en la ecuación, con el cual tenemos: $16 + y = 30$. Luego, $y = 30 – 16$, de donde $y = 14$. Ahora, sabemos que el recipiente B contiene 14 litros de leche.

Sin embargo, es preciso dejar en claro el proceso de simbolización de la pregunta 2 (e) referente a: Si extraemos 2 litros de leche del recipiente *B* y lo vertimos al recipiente *A*, éste tendrá 6 litros más. Reemplazando los datos para los recipientes *A* y *B*.

$A = x + 2$	$B = y – 2$
$A = 16 + 2$	$B = 14 – 2$
$A = 18$	$B = 12$

Podemos apreciar entonces, que el recipiente *A* tiene 6 litros más que el recipiente *B*, quedando claro así el proceso de simbolización para esta parte.

En tercer lugar, se verifica los resultados reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema:

$x – y = 2$

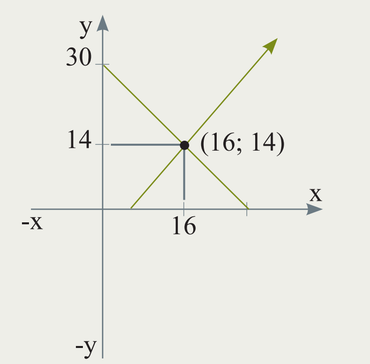
16 – 14 = 2 □ 2 = 2

A este proceso lo llamamos comprobación y, seguidamente, podemos señalar entonces el conjunto solución del sistema como un par ordenado: $(x; y)$

C. S. = {(16; 14)}

Luego podemos explicar la solución en forma gráfica.

Punto solución



En cuarto lugar, podemos trabajar los demás métodos de eliminación, como el de sustitución e igualación (en éste último señalando la propiedad transitiva de la igualdad).

También podemos trabajar el método de determinantes.

Sin embargo, al sistematizar el mecanismo de eliminación emerge la regla del pivote o método de Gauss- Jordán, que es una técnica que permite resolver sistemas de ecuaciones lineales, aunque éstos tengan coeficientes no enteros.

JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS

(Alemania, 1777 – Alemania, 1855)

Gauss fue un matemático, astrónomo y físico de una profunda genialidad, que contribuyó significativamente en muchos campos como en la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado “El Príncipe de la Matemática” y “El matemático más grande desde la antigüedad”, Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la Matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido en la Historia.

http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Recuerda

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{fila 1} \\ \rightarrow \text{fila 2} \end{array}$$

Representa a una matriz.

4.2 Situación a-didáctica: armando un rompecabezas gaussiano

1. TEMA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.
2. EXPECTATIVA DE LOGRO DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA:
   Destreza: Analiza (razonamiento y demostración)
   – Reconoce un sistema de ecuaciones con dos variables en situaciones de su vida diaria.
3. MÉTODOS, PROCEDIMIENTOS, TÉCNICAS SUGERIDOS:
   Inductivo-deductivo, interrogación didáctica, lluvia de ideas, entre otros.
4. MEDIOS Y MATERIALES:
   – Hojas estructuradas.

FICHA DE TRABAJO

A continuación te presentamos una ficha desarollada para que puedas trabajar con tus estudiantes.

Dado el sistema $\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ x-2y=6 \end{cases}$

2. Formemos la matriz con los coeficientes de las ecuaciones del sistema y numera las filas:

	x	*y*	
f_1	2	3	-2
f_2	1	-2	6

3. ¿Qué acción se realiza para obtener la siguiente matriz? Numera las filas.

	x	*y*	
f_3	1	-2	6
f_4	2	3	-2

Permutamos fila 1 con fila 2

4. ¿Qué operaciones aritmética se realizan con las filas de la matriz anterior para obtener la siguiente matriz? Numera las filas.

	x	*y*	
f_5	1	-2	6
f_6	0	7	-14

$\rightarrow$ $-2f_3 + f_4$

5. ¿Qué operaciones aritméticas se realizan con las filas de la matriz anterior para obtener la siguiente matriz? Numera las filas.

	x	*y*	
f_7	1	-2	6
f_8	0	1	-2

$\rightarrow$ $\frac{1}{7} f_6$

6 ¿Qué operaciones aritméticas se realizan con las filas de la matriz anterior para obtener la siguiente matriz? Numera las filas.

	x	*y*	
f_1	1	0	2
f_2	0	1	-2

$\rightarrow$ $2f_8 + f_7$

7. De esta última matriz podemos afirmar que el valor de *x* es 2 y el valor de *y* es -2. ¿Por qué?

PRIMERA ETAPA. (Adaptación: juego libre).

Se les presenta a los estudiantes, formados en grupos de cuatro integrantes, un problema sobre un sistema de ecuaciones. Inmediatamente ellos y ellas tantean las soluciones.

SEGUNDA ETAPA. (Estructuración: restricciones, reglas de juego).

Ahora se les pide que:

– Expresen el problema planteado a través de un sistema de ecuaciones.

TERCERA ETAPA.

Se les pide que, con los coeficientes del sistema lineal obtenido, formen una matriz como la presentada en la ficha de trabajo.

CUARTA ETAPA.

Ahora se les indica que busquen las operaciones aritméticas convenientes para llegar a una matriz como la obtenida en el paso 6 de la ficha presentada.

QUINTA ETAPA.

Se les pregunta a los estudiantes y cuál es la solución del sistema de ecuación y por qué.

SEXTA ETAPA.

Se les indica a los estudiantes que representen gráficamente el sistema de ecuaciones obtenido en el plano cartesiano describiendo la representación y solución gráfica.

SÉPTIMA ETAPA.

En esta etapa, se les indica a los estudiantes que comparen las solución obtenida en la quinta etapa con la solución obtenida en la sexta etapa.

OCTAVA ETAPA.

Se les presenta a los estudiantes la formalización del método de solución sugerido en la ficha de trabajo, llamado Método de Gauss - Jordan.

PRESENTACIÓN DEL MÉTODO DE GAUSS - JORDAN

El método de Gauss - Jordan se basa en la aplicación de operaciones elementales sobre las filas de una matriz.

Las operaciones elementales son:

i. Intercambio de filas.

ii. Multiplicación de una fila por un número real diferente de cero.

iii. Multiplicación de una fila por un número real diferente de cero sumada a otra fila.

Ejemplo:

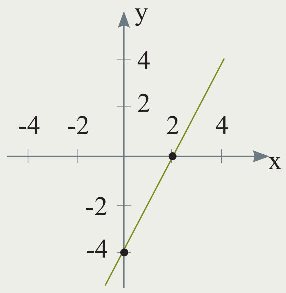
Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones, aplicando este método.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$$

Reprentación gráfica del sistema de ecuaciones

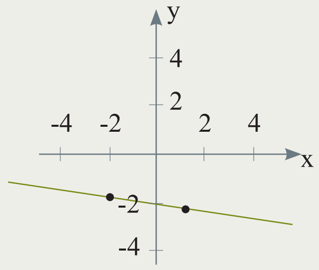
Ecuación: $2x - y = 4$

x	0	2
y	-4	0

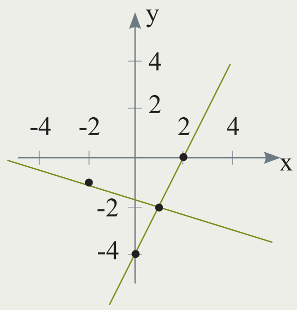


Ecuación: $x + 3y = -5$

x	1	-2
y	-2	-1



Solución gráfica:



Resolución:

f_1	2	-1	4	
f_2	1	3	-5	
f_3	1	3	-5	Intercambio de f_1 por f_2
f_4	2	-1	4	
f_5	1	3	-5	
f_6	0	-7	14	$-2\ f_3 + f_4$
f_7	1	3	-5	
f_8	0	1	-2	$\frac{1}{7}\ f_6$
f_9	1	0	1	
f_{10}	0	1	-2	$-3\ f_8 + f_7$

Solución: x = 1; y = -2

Observación:

Este método se puede generalizar para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales de tres o más variables.

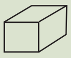
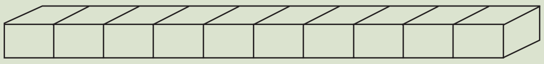
Actividad 4

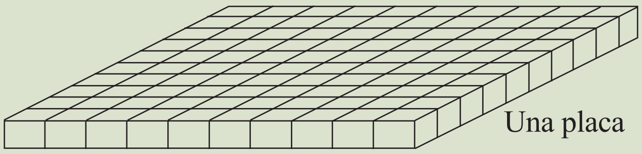
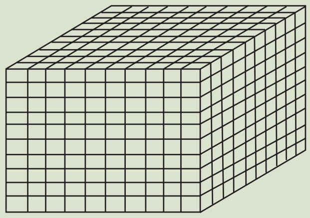
en grupo...

investiga *con tus colegas*

Organiza un grupo de cuatro colegas, y presenta un informe sobre la resolución de los problemas formulados.

1. Cuestión inicial:

Si:  Un cubo pequeño  Una barra

 Una placa  Un bloque (cubo grande)

Problema:

Se tiene un bloque de barra formada por x cubos pequeños, la placa por x barras y el cubo grande por x placas, ¿cuál sería el volumen de la barra? ¿Y el volumen de la placa? ¿Y el volumen del cubo?

a. Con este tipo de piezas, ¿qué volumen ocupan tres cubos pequeños, una barra y dos bloques?

b. Dibuja el volumen $(3x^3 + 2x^2 + 4x + 7)\ \text{cm}^3$.

2. Discute con tus colegas sobre la posibilidad de que a partir de la situación anterior se puede armar una situación didáctica para construir los productos notables.

5. Evaluación

En una hoja aparte, responde con honestidad las siguientes preguntas:

1. ¿A qué se denominan representaciones semióticas?
2. ¿Cuál es la importancia de tener en cuenta el pasaje entre registros en doble sentido (ida y vuelta) y la coordinación (o articulación) entre registros?
3. Describe las diferentes representaciones de dos objetos matemáticos en diferentes registros de representación semiótica.
4. ¿En qué caso el pase de un registro a otro no resulta natural? Explica.
5. ¿Cuáles son las tres actividades cognitivas fundamentales, según Duval, ligadas a la semiosis para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación?
6. Explica el proceso de modelización utilizando el razonamiento algebraico en un caso particular.
7. ¿Cuáles son los tipos de representaciones según Brunner?
8. ¿De qué se ocupan la teoría de situaciones didácticas y la teoría de registros de representación semiótica? Establece semejanzas y diferencias.
9. Elabora una situación didáctica para iniciar al estudiante en el estudio de las ecuaciones y otra para inecuaciones, teniendo en cuenta ambas teorías.
10. Elabora una situación a-didáctica que le permita visualizar a los estudiantes los usos de las variables como instrumentos para expresar relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz.
11. ¿Una situación a- didáctica permite el trabajo con la teoría de registros de representación semiótica? ¿Por qué?
12. ¿Cómo se asegura la discusión?
13. ¿Cómo se evaluará?
14. ¿Quién retroalimentará?
15. ¿Dónde aparecerán las clases o comentarios de actividades?

6. METACOGNICIÓN

Metacognición es la habilidad de pensar sobre el discurso del propio pensamiento, es decir, sirve para darnos cuenta cómo aprendemos cuando aprendemos.

Responde en una hoja aparte:

1. ¿De qué manera te organizaste para leer el fascículo y desarrollar las actividades propuestas?
2. ¿Te fue fácil comprender el enunciado de las actividades? ¿Por qué?
3. Si no te fue fácil, ¿qué hiciste para comprenderlo?
4. ¿Qué pasos has seguido para desarrollar cada una de las actividades?
5. ¿Cuáles de estos pasos te presentaron mayor dificultad?
6. ¿Cómo lograste superar estas dificultades?
7. Al resolver la evaluación, ¿qué ítems te presentaron mayor dificultad?
8. ¿Qué pasos has seguido para superar estas dificultades?
9. ¿En qué acciones de tu vida te pueden ayudar los temas desarrollados en este fascículo?
10. ¿Qué nivel de logro de aprendizaje consideras que has obtenido al finalizar este fascículo?

Muy bueno	Bueno	Regular	Deficiente
	NO ESC	RIBIR	

¿Por qué?

11. ¿Crees que las actividades de investigación fueron realmente un trabajo de equipo? Explica.
12. ¿Tuviste la oportunidad de compartir tus conocimientos con algunos de tus colegas? ¿Qué sentimientos provocaron en ti este hecho?

BIBLIOGRAFÍA *comentada*

1. Boyer, C. **Historia de la Matemática.** Madrid. Alianza Universidad, 1986.

   Libro muy conocido que aborda la historia de la Matemática de una manera didáctica.

2. Chevallard, Yves; Bosch, Marianna; Gascón, Joseph. **Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.** Barcelona. Editores: SEP/CE/Horsori, 1998.

   Presenta una profunda reflexión sobre el estudio de la Matemática, la contextualización de los problemas y las situaciones didácticas y aspectos prácticos didácticos.

3. Chirinos M. Daniel. **Didáctica de la Matemática**. Lima. La Cantuta, 2000.

   Entre otros aspectos, trata la didáctica de la Matemática como ciencia y esboza la teoría de situaciones didácticas.

4. Chirinos M. Daniel. **Diseño y elaboración de materiales educativos**. Lima. La Cantuta, 2004.

   Trata sobre aspectos generales de los medios y materiales, así como su aplicación en el aula a la luz de la teoría de las situaciones didácticas.

5. Colectivo de autores. **Didáctica General y optimización de la clase.** La Habana. Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño(IPLAC), 2001.

   Presenta los principios didácticos y aspectos profundamente reflexivos sobre una didáctica desarrolladora.

6. Dienes, Z.P. **Las seis etapas de aprendizaje en la Matemática.** Barcelona. Ed. Teide,1970.

   Presenta actividades para desarrollar la comprensión de aspectos matemáticos.

7. Duval, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**. Cali. Universidad del Valle, 1999.

   Es un texto de análisis de los registros semióticos y aprendizajes intelectuales.

8. Godino, Juan D y Font, Vicent. **Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.** Granada. Universidad de Granada, 2003.

   Enfoca el aspecto teórico y didáctico del razonamiento del álgebra con diferentes actividades, en su gran mayoría para el nivel primario.

9. Labinowicz, E. **Introducción a Piaget. Pensamiento-Aprendizaje-Enseñanza.** México. Fondo Educativo Interamericano, 1986.

   Sustenta la teoría genética de manera experimental y muy sencilla de comprender.

10. Lages, Elon. **Mi profesor de Matemática y otras historias**. Lima. IMCA-UNI, 1998.

    Publicación que está dedicada a la enseñanza y divulgación de la Matemática.

11. National Council of Teachers of Mathematics. **Principios y Estándares para la Educación Matemática.** Andalucía. Thales, 2000.

    Es una guía para todos los que toman decisiones que afectan a la educación matemática. Sus recomendaciones están basadas en la creencia de que todos los estudiantes deberían aprender de manera comprensiva conceptos y procesos matemáticos importantes. Este documento ofrece argumentos sobre la importancia de tal comprensión, y describe las formas de lograrla.

ENLACES *web*

1. *http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Problemas/23-2-p-actividades.html*

   Página *web* en la que encontrará una variedad de actividades para entender la utilidad del Álgebra.

2. *http://dmaii.etsii.upm.es/~mlopez/pdfs/a1tema1-0506.pdf*

   En esta página *web* encontrará nociones básicas y estructuras algebraicas, presentadas de una manera fácil de entender.

3. *http://www.elhuevodechocolate.com/acertijo6.htm*

   Página *web* que contiene aspectos recreativos como acertijos y chistes de Matemática.

4. *http://platea.pntic.mec.ps/~jescuder/fra_prob.ntm*

   Considera temas diversos de Matemática, en particular de Álgebra, destacando las estrategias para la formulación y resolución de problemas.

5. *http://www.cn/ce.mec.es/jovenes/matematicos/*

   Considera diversidad de curiosidades matemáticas, sobre todo en el tema del Álgebra, destacando el contenido de ecuaciones.

6. *http://www.ciudadfutura.com/matematicas/index.html*

   Contiene contenidos matemáticos diversos, destacando el Álgebra, sus curiosidades, ejercicios y tratamiento de problemas.

7. *http://www.geocities.com/halen_shezar/matrices/gaussjordan.html*

   En esta página *web* encontrará la explicación detallada de cómo aplicar el método de Gauss-Jordan.

8. *http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40516302.pdf*

   En esta página *web* encontrará un análisis de los problemas y desafíos en educación matemática: ¿qué nos ofrece hoy la didáctica de la Matemática para afrontarlo? Este tema nos ayudará a reflexionar sobre nuestro rol como docentes.